

# Física

12°

# Tema 1. Movimiento periódico

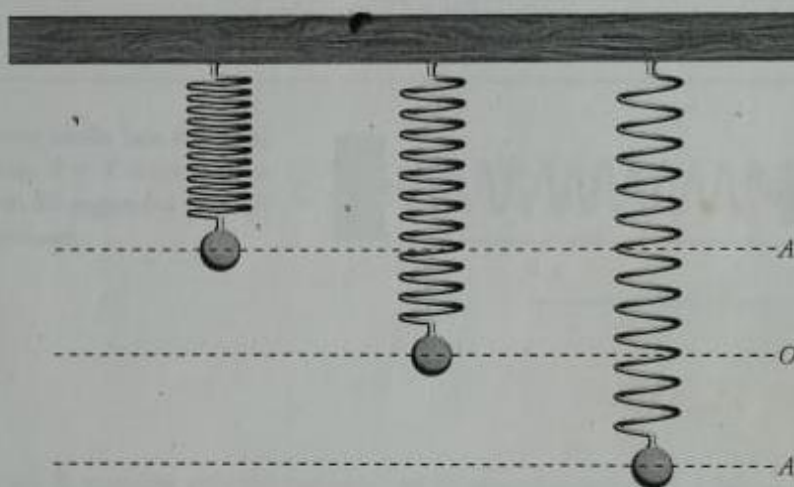
## Indicadores de logro

1. Establece las condiciones para que se observe un movimiento armónico simple y determina qué factores lo afectan.
2. Aplica modelos matemáticos para la determinación del desplazamiento, la velocidad y la aceleración en términos de tiempo, frecuencia y amplitud en un movimiento armónico simple.

## Movimiento oscilatorio

En la naturaleza existen algunos cuerpos que describen movimientos repetitivos con características similares, como el péndulo de un reloj, las cuerdas de una guitarra o el extremo de una regla sujeta en la orilla de una mesa. Todos los movimientos que describen estos objetos se definen como **periódicos**.

La forma más simple de movimiento periódico es el movimiento oscilatorio de un objeto que cuelga atado de un resorte. Este objeto oscila entre sus posiciones extremas, pasando por un punto que corresponde a su posición de equilibrio, como se observa en la siguiente figura.



Un **movimiento oscilatorio** se produce cuando al trasladar un sistema de su posición de equilibrio, una fuerza restauradora lo obliga a desplazarse a puntos simétricos con respecto a esta posición.

Para describir un movimiento oscilatorio es necesario tener en cuenta los siguientes factores:

- **Oscilación o ciclo.** Se produce cuando un objeto, a partir de determinada posición, después de ocupar todas las posibles posiciones de la trayectoria, regresa a ella. Por ejemplo, en la figura anterior se produce un ciclo cuando el objeto describe una trayectoria  $AOA'OA$ .
- **Período ( $T$ ).** Tiempo que tarda un objeto en realizar una oscilación. Se representa con la letra. Su unidad de medida en el Sistema Internacional (SI) es el segundo.
- **Frecuencia ( $f$ ).** Es el número de ciclos que realiza un objeto por segundo. En el SI la frecuencia se mide en hercios (Hz).

En el movimiento oscilatorio la frecuencia y el período se relacionan entre sí, siendo uno recíproco del otro; es decir:

$$f = \frac{1}{T} \text{ y } T = \frac{1}{f}$$

## Fisicamente

Un bloque ligado a un muelle elástico oscila verticalmente 40 veces en 8 segundos. Calcula el período y la frecuencia de oscilación.



- **Elongación.** Es la posición que ocupa un objeto respecto de su posición de equilibrio. En la figura 1 se representan diferentes elongaciones:  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .
- **Amplitud ( $A$ ).** Es la mayor distancia (máxima elongación) que un objeto alcanza respecto de su posición de equilibrio. La unidad de medida de  $A$  en el SI es el metro. En el ejemplo de la figura 1 la amplitud es  $A = 10$  m.

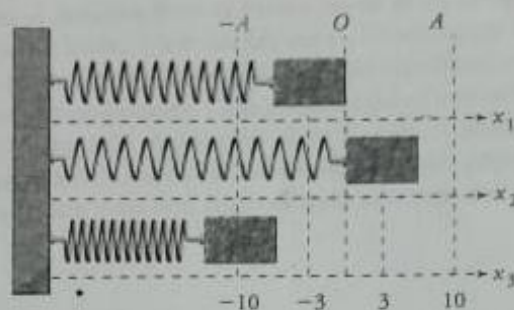
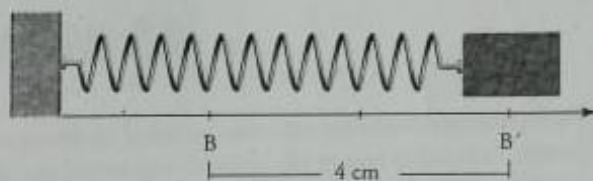


Figura 1. Posiciones que ocupa la masa en el tiempo y amplitud del movimiento.

### EJEMPLOS

1. Un bloque atado a un resorte oscila (sin fricción) entre las posiciones extremas  $B$  y  $B'$  indicadas en la figura de la derecha. Si en 10 segundos pasa 30 veces por el punto  $B$ , determinar:



- El período de oscilación.
- La frecuencia de oscilación.
- La amplitud.

#### Solución:

a. Cada vez que el bloque pasa por  $B$ , completa un ciclo; por tanto, en 10 segundos realiza 20 ciclos, es decir, que un ciclo ocurre en un tiempo:

$$T = \frac{10 \text{ s}}{20} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

El período del movimiento es:  $1/2$  s

b. La frecuencia es:  $f = \frac{1}{T}$

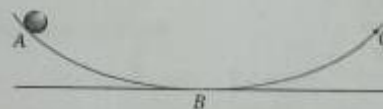
Ecuación de la frecuencia

Al reemplazar y calcular  $f = \frac{1}{1/2 \text{ s}} = 2 \text{ s}^{-1} = 2 \text{ Hz}$  La frecuencia de oscilación es 2 Hz

c. El punto de equilibrio del sistema se ubica en el punto medio entre  $B$  y  $B'$ . Por tanto, la amplitud del movimiento es  $A = 2$  cm.

2. Una esfera se suelta en el punto  $A$  y sigue la trayectoria que se muestra en la figura. Resolver los siguientes ejercicios:

- Considerar que hay fricción y describir la trayectoria del movimiento.
- Describir la trayectoria del movimiento suponiendo que no hay fricción.



#### Solución:

- Si hay fricción, la energía mecánica no se conserva y la esfera no alcanza el punto  $C$ , que está a la misma altura que  $A$  con respecto a  $B$ . Cuando oscila alrededor de  $B$ , cada vez alcanza menos altura, hasta lograr el reposo.
- Si no hay fricción, la esfera alcanza el punto  $C$ , pasa por  $B$  y alcanza el punto  $A$ , oscilando indefinidamente con respecto al punto  $B$ .



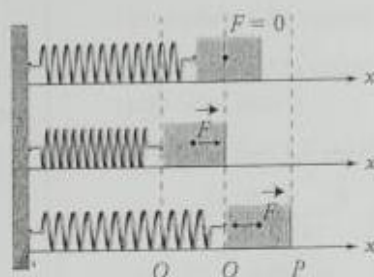


**Figura 2.** Al retirar la fuerza aplicada sobre la almohada, esta recupera su forma inicial paulatinamente.

## Movimiento armónico simple (MAS)

Al recostarse sobre una almohada, esta se deforma pero su forma inicial se recupera a partir del instante en que se deja de ejercer fuerza sobre ella (figura 2). Todos los materiales presentan este comportamiento (unos más que otros) debido a que el movimiento de sus partículas depende de las fuerzas intermoleculares. Cada partícula del objeto oscila alrededor de su punto de equilibrio, alcanzando su posición extrema, que es cuando inicia el proceso de recuperación de su estado inicial; es como si cada partícula permaneciera atada a su vecina mediante un resorte y oscilara como cuando se comprime.

Observa la siguiente figura:



Para que un objeto, como el representado en la figura, describa un movimiento oscilatorio, se requiere que sobre él actúe una fuerza que lo dirija del punto  $O$  hacia el punto  $Q$ , lo cual ocasiona una disminución en su rapidez e implica que dicha fuerza esté dirigida hacia  $O$ . Si el objeto se mueve del punto  $Q$  al punto  $O$ , la rapidez se incrementa, dirigiendo la fuerza hacia el punto  $O$ .

Cuando el objeto se mueve del punto  $O$  hacia el punto  $P$ , la rapidez disminuye, lo cual implica que la fuerza esté dirigida hacia el punto  $O$ , y cuando el objeto se mueve desde el punto  $P$  hacia el punto  $O$ , la rapidez aumenta, lo cual requiere que la fuerza esté dirigida hacia el punto  $O$ .

En todos los casos, la fuerza está dirigida hacia la posición de equilibrio ( $O$ ), por lo cual se denomina **fuerza de restitución**. A este tipo especial de movimiento se le llama movimiento armónico simple.

Un **movimiento armónico simple** es un movimiento oscilatorio en el cual se desprecia la fricción y la fuerza de restitución es proporcional a la elongación. Al cuerpo que describe este movimiento se le conoce como **oscilador armónico**.

Como los vectores fuerza y elongación se orientan en direcciones contrarias, la fuerza y la elongación se pueden relacionar mediante la ley de Hooke:

$$F = -kx$$

siendo  $k$  la constante elástica del resorte, expresada en  $N/m$ .

La constante elástica del resorte se refiere a la dureza de este. A mayor dureza mayor constante  $k$ , por tanto, se necesita aplicar mayor fuerza sobre el resorte para estirarlo o comprimirlo. Como acción a esta fuerza, la magnitud de la fuerza recuperadora mantiene la misma reacción.

Por ejemplo, en la industria es importante conocer la constante elástica de los diferentes resortes. Así la constante elástica del resorte de una pluma retráctil va a ser menor que la del resorte de un colchón que requiere soportar una fuerza mayor.

### Historia de la física

**Robert Hooke**  
(1635-1703)



Robert Hooke fue un científico inglés.

Junto a Robert Boyle formuló en 1660 la *Ley de Hooke*, que describe cómo la fuerza que actúa sobre un cuerpo elástico es proporcional a la longitud que se estira.

## EJEMPLO

Un ascensor tiene una masa de 250 kg. Cuando transporta el máximo de carga, 350 kg, comprime cuatro resortes 3 cm. Considerando que los resortes actúan como uno solo, calcular:

- La constante del resorte.
- La longitud de la compresión del resorte cuando el ascensor no tiene carga.

### Solución:

- La fuerza (el peso) ejercida por el ascensor y la carga:

$$F = W = (m_{\text{asc}} + m_{\text{car}}) \cdot g \quad \text{Fuerza ejercida}$$

$$W = (250 \text{ kg} + 350 \text{ kg}) \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \quad \text{Al reemplazar}$$

$$W = 5880 \text{ N} \quad \text{Al calcular}$$

La fuerza ejercida por el ascensor y la carga es 5880 N y comprimen el resorte  $3,0 \times 10^{-2} \text{ m}$ . Por tanto, de acuerdo con la ley de Hooke, la constante del resorte es:

$$k = \frac{F}{x} \quad \text{Al despejar } k$$

$$k = \frac{5880 \text{ N}}{3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \quad \text{Al reemplazar}$$

Por tanto,

$$k = 196\,000 \text{ N/m}$$

La constante del resorte es 196 000 N/m

- La fuerza ejercida sobre el resorte para el ascensor sin carga es su peso:

$$W = (250 \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2) = 2450 \text{ N}, \text{ por tanto:}$$

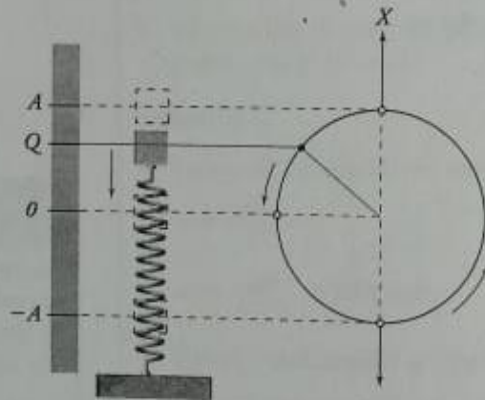
$$x = \frac{2450 \text{ N}}{196\,000 \text{ N/m}} \quad \text{Al reemplazar}$$

$$x = 1,25 \times 10^{-2} \text{ m} \quad \text{Al calcular}$$

Cuando el ascensor no tiene carga, el resorte se comprime 12,5 mm.

## Proyección de un movimiento circular uniforme

Para encontrar las ecuaciones de la posición, velocidad y aceleración de un movimiento armónico simple, nos apoyaremos en la semejanza entre la proyección del movimiento circular uniforme de una esfera pegada al borde de un disco y una masa que vibra sujeta al extremo de un resorte, como lo muestra la figura.



El movimiento oscilatorio de la masa y la proyección circular uniforme de la esfera son idénticos si:

- La amplitud de la oscilación de la masa es igual al radio del disco.
- La frecuencia angular del cuerpo oscilante es igual a la velocidad angular del disco.

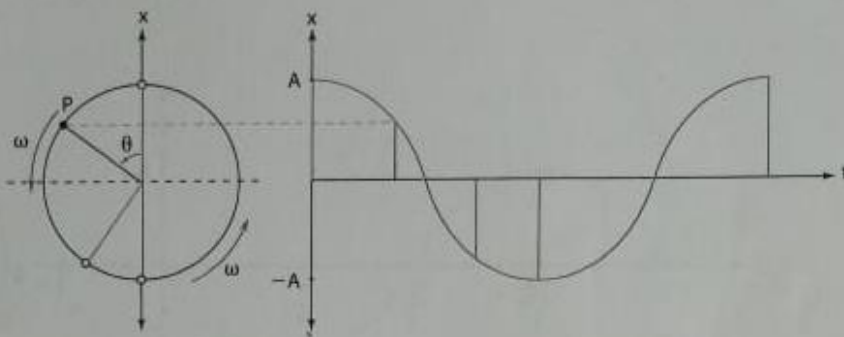
El círculo en el que la esfera se mueve, de modo que su proyección coincide con el movimiento oscilante de la masa, se denomina **círculo de referencia**.

### Recurso TIC

Trabaja en la siguiente dirección electrónica:  
<http://www.santillana.com.pa/OD/armonicoF12>

### La posición

Para encontrar la ecuación de posición de una masa con movimiento armónico simple en función del tiempo, se emplea el círculo de referencia y un punto de referencia  $P$  sobre él. En la siguiente figura se observa que en un instante de tiempo  $t$ , un objeto se ha desplazado angularmente, forma un ángulo  $\theta$  sobre el eje  $x$ . Al girar el punto  $P$  en el punto de referencia con velocidad angular  $\omega$ , el vector  $OP$  también gira con la misma velocidad angular, proyectando su variación de posición con respecto al tiempo.



Esta proyección de la posición del objeto sobre el eje  $x$  se puede determinar mediante la expresión:

$$x = A \cdot \cos \theta$$

Como la pelota gira con velocidad angular  $\omega$ , el desplazamiento se expresa como  $\theta = \omega \cdot t$ . Por tanto, la elongación,  $x$ , en el movimiento oscilatorio es:

$$x = A \cdot \cos (\omega \cdot t)$$

### EJEMPLO

Un cuerpo describe un movimiento circular uniforme con período de 0,1 s y radio 5 cm. Determinar:

- La velocidad angular del movimiento circular.
- La ecuación de posición del objeto a los 0,25 segundos después de que el objeto ha pasado por el punto  $P$ .

#### Solución:

- La velocidad angular del movimiento es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Al reemplazar y calcular

$$\omega = \frac{2\pi}{0,1 \text{ s}} = 20\pi \text{ rad/s}$$

La velocidad angular es  $20\pi \text{ rad/s}$

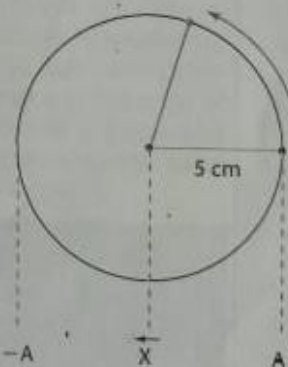
- La posición del objeto después de 0,25 segundos es:

$$x = A \cdot \cos (\omega \cdot t)$$

$$x = 5 \text{ cm} \cdot \cos (20\pi \text{ rad/s} \cdot 0,25 \text{ s})$$
 Al reemplazar

$$x = -5 \text{ cm}$$
 Al calcular

El cuerpo se encuentra a  $-5 \text{ cm}$  de la posición de equilibrio.



#### Físicamente

La ecuación de posición respecto al tiempo de una pelota que describe un movimiento circular uniforme es:

$$x = 7 \cos (4\pi \cdot t)$$

Determina:

- La amplitud.
- El período.
- La frecuencia.



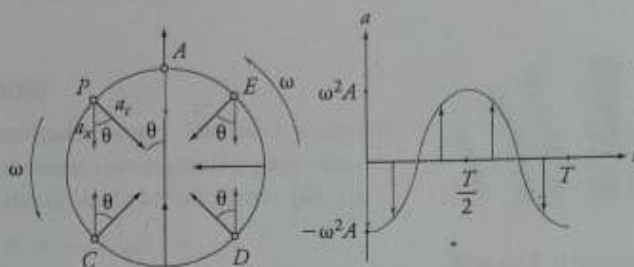
### Recuerda que...

Para realizar la operación de funciones trigonométricas en la calculadora, ésta debe estar en la opción DEG.

Para colocar la calculadora en función DEG, sigue los siguientes pasos:

- Presiona la tecla mode.
- Elige la opción DEG.

En la parte superior o inferior de la calculadora debe aparecer D o DEG.



La aceleración de la proyección del movimiento circular uniforme se expresa como:

$$a = -a_c \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

En un movimiento circular uniforme la aceleración es centrípeta, es decir,

$a_c = \omega^2 \cdot A$ , luego, la expresión para la aceleración sobre el eje  $x$  es:

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Al comparar esta ecuación con la ecuación de la posición,  $x = A \cdot \cos \theta$ , también se puede expresar la aceleración como:

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton,  $F = m \cdot a$ , se puede expresar la fuerza de este movimiento oscilatorio como:

$$F = m \cdot a \quad \text{Segunda ley de Newton}$$

$$F = m \cdot (-\omega^2 \cdot x) \quad \text{Al reemplazar } a = -\omega^2 \cdot x$$

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

### Recuerda que...

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1} = \frac{1}{3}$$

Como la masa y la velocidad angular son constantes, entonces, la fuerza de la proyección del movimiento circular uniforme varía en forma proporcional a la elongación. En consecuencia, el movimiento de la proyección de un movimiento circular uniforme es armónico simple.

## EJEMPLO

Para el Día de la Ciencia, los estudiantes del duodécimo grado construyeron un pistón que realiza un movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es de 0,8 cm y su frecuencia angular de 188,5 rad/s. Si se considera el movimiento a partir de su elongación máxima positiva después de tres segundos, calcular:

- La velocidad del pistón.
- La aceleración del pistón.

### Solución:

- La magnitud de la velocidad al cabo de 3 s es:

$$v_x = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$v = -188,5 \text{ Hz} \cdot 0,8 \text{ cm} \cdot \sin(188,5 \text{ Hz} \cdot 3 \text{ s})$$

$$v \approx -65 \text{ cm/s}$$

Al cabo de 3 segundos, la velocidad del pistón es aproximadamente  $-65 \text{ cm/s}$ .

El signo negativo significa que la dirección es contraria a la dirección de la elongación.

- La magnitud de la aceleración al cabo de 3 s es:

$$a = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$a = -(188,5 \text{ Hz})^2 \cdot 0,8 \text{ cm} \cdot \cos(188,5 \text{ Hz} \cdot 3 \text{ s})$$

$$a = -25 \, 656,7 \text{ cm/s}^2$$

A los 3 segundos, el pistón alcanza una aceleración de  $-25 \, 656,7 \text{ cm/s}^2$ .

El signo negativo es por la dirección contraria a la dirección positiva de la elongación.



## Periodo de un movimiento armónico simple

Hasta el momento se han mencionado movimientos oscilatorios en los cuales se conoce previamente el período; sin embargo, es posible encontrar una expresión para este, relacionando la fuerza recuperadora y la fuerza en el movimiento armónico simple. Así:

$$F = -k \cdot x, \quad y, \quad F = -m \cdot \omega^2 \cdot x$$

Al igualar las dos ecuaciones se tiene que:

$$-k \cdot x = -m \cdot \omega^2 \cdot x \quad \text{Al igualar las ecuaciones}$$

$$-k = -m \cdot \omega^2 \quad \text{Al simplificar } x$$

$$k = m \cdot \omega^2 \quad \text{Al multiplicar por } -1$$

Si se despeja la frecuencia angular  $\omega$ , obtenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , al igualar tenemos:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$

Al despejar  $T$  obtenemos la ecuación del período para el movimiento armónico simple:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Por tanto, el período para un movimiento armónico simple depende de la masa del objeto oscilante y de la constante elástica del resorte (figura 4).

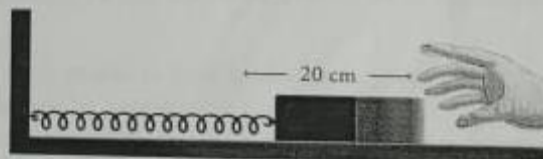


**Figura 4** El tiempo que cada resorte tarda en hacer una oscilación depende de su dureza.

## EJEMPLO

La figura muestra un objeto cuya masa es 250 g atado al extremo de un resorte cuya constante elástica es 50 N/m. El objeto se aleja de la posición de equilibrio una distancia igual a 20 cm y se suelta para que oscile. Si se considera despreciable la fricción, determinar:

- La amplitud, el período y la frecuencia del movimiento.
- La ecuación de la posición del movimiento.
- La gráfica de la elongación  $x$  en función del tiempo.



### Solución:

- Como el objeto se aleja 20 cm de la posición de equilibrio, la amplitud del movimiento es 20 cm.

El período de un MAS está dado por:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0,25 \text{ kg}}{50 \text{ N/m}}} \quad \text{Al reemplazar}$$

$$T = 0,44 \text{ s} \quad \text{Al calcular}$$

La frecuencia del movimiento está dada por:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{0,44 \text{ s}} = 2,27 \text{ s}^{-1} \quad \text{Al reemplazar}$$

El período y la frecuencia de oscilación son 0,44 s y 2,27 s<sup>-1</sup>, respectivamente.





b. La ecuación para la posición del objeto es:

$$x = A \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,44 \text{ s}}$$

$$\omega = 4,54 \pi \text{ rad/s}$$

Al reemplazar tenemos que la ecuación de posición es:

$$x = 20 \cdot \cos 4,54\pi \cdot t$$

c. La representación gráfica de la elongación en función del tiempo es:

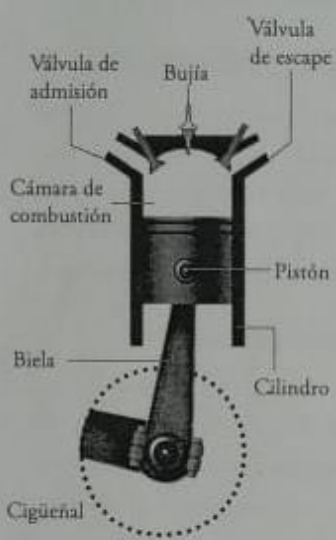
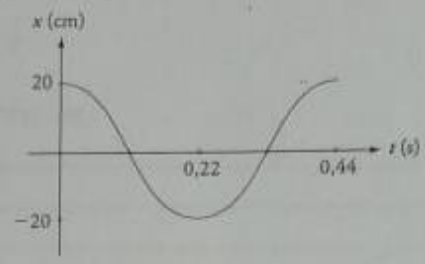


Figura 5. El movimiento oscilatorio de la biela genera un movimiento circular en el cigüeñal.

### El motor de gasolina

A partir de un movimiento oscilatorio se puede producir un movimiento circular. Un ejemplo de esta relación es el funcionamiento de un motor de gasolina de cuatro tiempos (figura 5):

- admisión
  - explosión
  - compresión
  - escape
- ⌘ En el primer tiempo, el de *admisión*, la mezcla de gasolina y aire llega a la cámara de combustión a través de la válvula de admisión, mientras el pistón baja a lo largo del cilindro.
  - ⌘ En el segundo tiempo, el de *compresión*, la válvula de admisión se cierra y el pistón sube, comprimiendo la mezcla.
  - ⌘ En el tercer tiempo, el de *explosión*, la bujía produce una chispa y se realiza trabajo sobre el pistón, ya que este baja a causa de la expansión de los gases resultantes.
  - ⌘ En el cuarto tiempo, el de *escape*, se abre la válvula de escape, permitiendo la salida de los gases mientras el pistón sube por el cilindro. A continuación se cierra la válvula de escape y se abre la de admisión, iniciando de esta manera otro ciclo.

**Recurso TIC**

Visite las siguientes direcciones electrónicas:

<https://www.youtube.com/watch?v=HUbSKmdUT50>

<https://www.youtube.com/watch?v=TaihHV4lyNA>

- Explica, con base en la información de los videos, el funcionamiento de un motor de gasolina.

El inicio de este funcionamiento, en un automóvil, se produce a través del arranque, mediante la llave. Es por esto que cuando el arranque de un automóvil, por una u otra razón no funciona, hay que ponerlo en marcha empujándolo, con el fin de que el movimiento circular de las ruedas inicie este proceso.

En un motor diésel no existe bujía, por lo cual no hay chispa en el tercer tiempo (explosión), ya que el combustible es introducido por medio de una bomba de inyección.

Un motor diésel aprovecha un mayor porcentaje del calor producido y resiste grandes compresiones, pero es más costoso y más pesado. Se utiliza en vehículos pesados, como camiones, mulas y autobuses.

Es importante destacar que los gases producidos por los motores ejercen un gran impacto en el medio ambiente, siendo más nocivo el motor diésel que el de gasolina.



---

---

---

---

---

---

---

---

4. ¿Qué es el movimiento armónico simple?

---

---

---

---

---

---

---

---

5. ¿A qué se refiere la constante elástica de un resorte?

---

---

---

---

---

---

---

---

6. ¿Cómo se encuentra la ecuación de posición de una masa con movimiento armónico? Diga la expresión que la determina.

---

---

---

---

---

---

---

---

7. ¿Cómo se expresa la proyección de velocidad de un objeto (masa) sobre el eje x?

---

---

---

---



