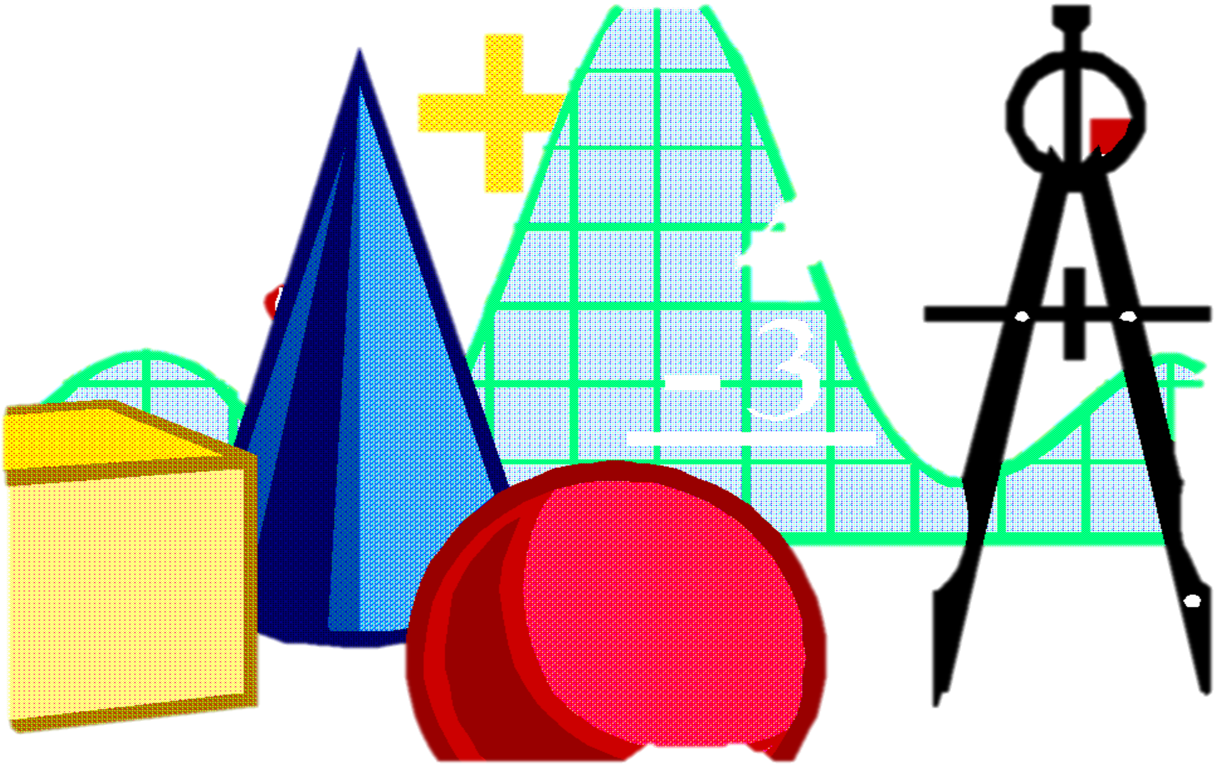


MINISTERIO DE EDUCACIÓN

ACADEMIA INTERNACIONAL SANTA FE

MÓDULO DE MATEMÁTICA PARA 10º

*Estudiante:*_______________________________________

*Nivel:*____

Profesor: Yoy Alexander Saucedo Barrios.

Tema 1

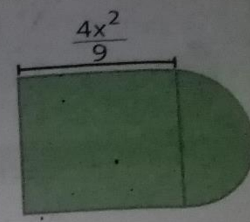
Potenciación y radicación

Indicadores de logro

1. Simplifica expresiones aritméticas y algebraicas, aplicando correctamente las propiedades de las potencias y de las raíces.
2. Determina correctamente los valores faltantes de expresiones algebraicas.
3. Resuelve situaciones reales, aplicando las propiedades de las potencias y las raíces, con seguridad.
4. Transforma expresiones con radicales a potencias y viceversa, aplicando con seguridad la propiedad.

Lee

Un terreno está formado por una zona cuadrada y otra semicircular. Si sus dimensiones, en kilómetros, se muestran en la figura de la derecha, ¿cuál expresión representa el área del terreno? ¿Cuál es la medida de la diagonal del cuadrado?



Analiza

- ¿Qué operación puedes usar para determinar el área de la zona cuadrada si conoces la medida del lado?; ¿y para expresar la diagonal?
- ¿Qué propiedad o propiedades puedes aplicar para expresar el área y la diagonal en su forma más simple?

Resuelve

Responde

1.1 Concepto de potenciación y sus propiedades

Recuerda que...

Los términos de una potenciación son:

$a^n = b$

Exponente: n; Base: a; Potencia: b

Para encontrar el área de la zona cuadrada del terreno, en el problema de arriba, se puede emplear la potenciación.

La **potencia** de un número real es el resultado de multiplicar ese número por sí mismo tantas veces como indica el exponente.

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots a}_{\textbf{n veces a}}$$

A la operación potenciación se le suele llamar también "potencia".

Las siguientes son propiedades de la potenciación de números reales:

Exponente cero	Exponente uno	Exponente negativo
$a^0 = 1$, $a \neq 0$	$a^1 = a$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

Producto de potencias de igual base	Cociente de potencias de igual base
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^m \div a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$

Potencia de un producto	Potencia de un cociente
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(a \div b)^n = a^n \div b^n$, $a \neq 0$

Potencia de una potencia	Exponente negativo de un cociente
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a, b \neq 0$

Ejercicio resuelto 1

Calcular el valor de A para $A = \dfrac{(n^4)^3 \cdot (n^2)^6 \cdot (n^3)^2}{(n^2)^3 \cdot [(n^2)^3]^4}$.

$$\frac{(n^4)^3 \cdot (n^2)^6 \cdot (n^3)^2}{(n^2)^3 \cdot [(n^2)^3]^4} =$$

$$\frac{n^{12} \cdot n^{12} \cdot n^6}{n^6 \cdot n^{24}} = \longleftarrow$$ **Propiedad de potencia de una potencia.**

$$\frac{n^{30}}{n^{30}} = \longleftarrow$$ **Propiedad del producto de potencias de igual base.**

$$n^{30-30} = \longleftarrow$$ **Propiedad del cociente de potencias de igual base.**

$$n^0 = 1. \longleftarrow$$ **Propiedad del exponente 0.**

El valor de A es 1.

Sabías que...

La potenciación permite expresar números muy grandes, como la distancia del Sol a la Tierra, o números muy pequeños, como la carga eléctrica de un electrón. Además, con la potenciación se pueden formular expresiones que permiten modelar fenómenos en biología, química, física, entre otras áreas. Por ejemplo, las leyes de Kepler, que describen los movimientos de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol, se plantean a partir de expresiones que incluyen potencias al cuadrado y al cubo.

Competencia

Pensamiento lógico matemático

Se cuenta que el inventor del ajedrez, un sacerdote llamado Sessa, presentó su invento al príncipe de la India. Este quedó tan impresionado que le dijo: "pide lo que quieras y te lo daré". El sacerdote le pidió que por la primera casilla del tablero le entregara un grano de trigo, por la segunda 2, por la tercera 4, por la cuarta 8, y así sucesivamente hasta la casilla 64. Para el rey este pedido fue insignificante, pero no pudo recompensar el pedido, pues no existía en el mundo tal cantidad de trigo.

- Representa, por medio de una suma de potencias, la cantidad de granos de trigo que pidió Sessa al príncipe. Usa puntos suspensivos para no anotar todos los sumandos.

Sabías que...

La suma de los primeros números naturales impares es igual al cuadrado de la cantidad de números naturales empleados.

Ejemplos:

$1 = 1 = 1^2$

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2 \ldots$

Ejercicio resuelto 2

Calcular el valor de L para $L = \dfrac{8^{m+2} \cdot 4^{m+1} \cdot 2^m}{64^{m+1}}$.

$\dfrac{8^{m+2} \cdot 4^{m+1} \cdot 2^m}{64^{m+1}} =$

$\dfrac{(2^3)^{m+2} \cdot (2^2)^{m+1} \cdot 2^m}{(2^6)^{m+1}} =$ ← **Se expresan todas las cantidades como potencias de base 2.**

$\dfrac{2^{3m+6} \cdot 2^{2m+2} \cdot 2^m}{2^{6m+6}} =$ ← **Propiedad de potencia de una potencia.**

$\dfrac{2^{3m+6+2m+2+m}}{2^{6m+6}} =$ ← **Propiedad del producto de potencias de igual base.**

$\dfrac{2^{6m+8}}{2^{6m+6}} =$

$2^{6m+8-(6m+6)} =$ ← **Propiedad del cociente de potencias de igual base.**

$2^2 = 4$

El valor de L es 4.

Sabías que...

Antes de la creación del análisis matemático era común aceptar que $0^0 = 1$. Sin embargo, en 1821 el matemático francés Augustin Cauchy (1789-1857) estableció una tabla de formas indefinidas entre las que se encuentran $\frac{0}{0}$ y 0^0.

En la actualidad, se considera la potencia 0^0 como indefinida y no se le asigna ningún valor, a menos de que exista un contexto en el que dicho valor tenga sentido.

Ejercicio resuelto 3

Resolver el problema.

Se ha observado que una bacteria se duplica cada hora. ¿Después de cuánto tiempo se tendrán 1024 bacterias?

- Se muestra la reproducción de las bacterias en la tabla:

Horas transcurridas	0	1	2	3	4	...	x
Número de bacterias	1	2	4	8	16	...	1024
Expresado como potencia	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	...	2^x

- Se plantea la situación mediante una potencia: $2^x = 1024$
- Se expresa 1024 como potencia de 2: $2^x = 2^{10}$
  Por lo tanto, $x = 10$.

Respuesta:
Después de 10 horas, se tendrán 1024 bacterias.

Taller Nº1

Desarrolle en los siguientes ejercicios, solo los números marcados con gancho.

Evaluación formativa

Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno y anota las respuestas en el libro.

Calcula las siguientes potencias:

1. $4^3 =$ ______
2. $2^0 =$ ______
3. $(-4)^4 =$ ______
4. $(-9)^3 =$ ______
5. $\left(\frac{1}{5}\right)^3 =$ ______
6. $\left(\frac{-2}{7}\right)^4 =$ ______
7. $6^{-3} =$ ______
8. $(0,75)^{-4} =$ ______
9. $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-5} =$ ______
10. $\left(\frac{-5}{3}\right)^{-6} =$ ______

Calcula lo siguiente:

11. $2^{-6}+4^{-3}+8^{-2}=$ ______

12. $(0,5)^4+(-0,25)^3+(0,125)^{-2}=$ ______

13. $2^0+2^1+2^2+2^3+2^4=$ ______

14. $6\cdot 3^2-\frac{9^2}{9}+9^3=$ ______

15. $4^{-1}\cdot 4-4^0+1-32^0=$ ______

16. $-5\cdot 100+5\cdot 10^{-1}-5\cdot 10^2=$ ______

17. $(-17)^0+\left(\frac{-5}{12}\right)^0-\left(\frac{x}{y}\right)^0=$ ______

Escribe cada producto como una sola potencia.

18. $9^4\cdot 9^7=$ ______

19. $(-10)^{-4}\cdot(-10)^{-3}\cdot(-10)^{-1}=$ ______

20. $\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{-5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^7=$ ______

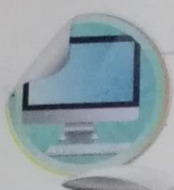
21. $a^5\cdot a^{-8}\cdot a^5=$ ______

22. $m^p\cdot m^2\cdot m^{-4}=$ ______

23. $(xy)^5\cdot(xy)^{15}\cdot(xy)^{-12}=$ ______

24. $(-4)^{x+1}\cdot(-4)^5\cdot(-4)^{3-4x}=$ ______

25. $(4xy)^{5+x}\cdot(4xy)^{-6+x-y}\cdot(4xy)^{x-2y}=$ ______



Competencia

Tratamiento de la información y competencia digital

Trabaja en la siguiente dirección electrónica:
http://www.santillana.com.pa/OD/potenciasM10

- Resuelve cada una de las actividades.
- Compara tus respuestas con las de un compañero o compañera.

Escribe cada expresión como el producto de 2 potencias.

26. $7^8=$ ______

27. $x^{p+4}=$ ______

28. $(-y)^{3-q}=$ ______

29. $(u+v)^{p+5}=$ ______

Escribe cada división como una sola potencia.

30. $(-3)^{-6}\div(-3)^4=$ ______

31. $a^4\div a^6\div a=$ ______

32. $t^{x+13}\div t=$ ______

33. $z^{-8}\div z^p\div z^{2p+1}=$ ______

Escribe cada expresión como la división de 2 potencias.

34. $(-3)^{-6}=$ ______

35. $k^{3a}=$ ______

36. $(-2)^{a+2b}=$ ______

37. $(x-2)^{2a-2b}=$ ______

Escribe cada expresión como una potencia con un único exponente.

38. $\left(\left(\left(-3\right)^2\right)^{-5}\right)^3=$ ______

39. $\left(\left(a^3\right)^{a+2}\right)^a=$ ______

40. $\left(\left(\frac{1}{q}\right)^s\right)^{-t}=$ ______

41. $\left(\left(\left(x-2y\right)^4\right)^t\right)^5=$ ______

Escribe cada expresión como una potencia con un único exponente positivo.

42. $\left[x^3\cdot(-2x^2)^2\right]^3=$ ______

43. $\dfrac{y^0\cdot y^{-1}\cdot(-y)^{-3}}{y^{-2}\cdot(-y)^2\cdot(-y)^{-2}}=$ ______

44. $\left[\dfrac{6x^{-2}y^3}{\left(18x^7y^{-4}z\right)^{-2}}\right]^{-1}=$ ______

Resolución de problemas

45. El cubo de un número es 8000. ¿Cuál es el cubo del doble de dicho número?

______

1.2 Concepto de radicación y sus propiedades

Recuerda que...

Los términos de un radical son los siguientes:

coeficiente, índice, raíz, subradical: $k\sqrt[n]{a} = b$

Una potencia de exponente racional, como $9^{\frac{1}{2}}$, se puede expresar utilizando el símbolo $\sqrt{\ }$, denominado raíz.

Potencias de la forma $a^{\frac{1}{n}}$

Si se tiene una potencia de exponente racional de la forma $a^{\frac{1}{n}}$, con $n \in \mathbb{N}$, se escribe: $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \longrightarrow$ Se lee "raíz enésima de **a**".

Potencias de la forma $a^{\frac{m}{n}}$

Si se tiene una potencia de exponente racional de la forma $a^{\frac{m}{n}}$, con $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ y **n** diferente de 0, se escribe: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$.

El resultado de una radicación se comprueba mediante una potenciación porque son operaciones inversas.

Radicación $\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a$ Potenciación

Las propiedades de la radicación son las siguientes:

Raíz de un producto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
Raíz de un cociente	$\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$, $b \neq 0$
Potencia de una raíz	$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Competencia

Tratamiento de la información y competencia digital

Trabaja en la siguiente dirección electrónica:
http://www.santillana.com.pa/OD/radicalesM10

- Resuelve cada una de las actividades propuestas.
- Compara tus respuestas con las de un compañero.
- Busca otros sitios de Internet con más ejercicios relacionados y resuélvelos.

Ejercicios resueltos 4

Expresar las potencias como radicales.

a. $(3m)^{\frac{1}{4}}$

$(3m)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3m}$

b. $384^{\frac{2}{3}}$

$384^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{384^2} = (\sqrt[3]{384})^2$

c. $(2x)^{\frac{-1}{5}}$

$(2x)^{\frac{-1}{5}} = \dfrac{1}{(2x)^{\frac{-1}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2x}}$

d. $(3p+2)^{\frac{-3}{5}}$

$(3p+2)^{\frac{-3}{5}} = \dfrac{1}{(3p+2)^{\frac{-3}{5}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(3p+2)^3}}$

Ejercicio resuelto 5

Simplificar la expresión $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a^{10}b^7}\cdot\sqrt{a^3b^9}}{\sqrt{ab^4}}}}$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a^{10}b^7}\cdot\sqrt{a^3b^9}}{\sqrt{ab^4}}}} =$

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt{a^{13}b^{16}}}{\sqrt{ab^4}}}} =$ ← Propiedad de la raíz de un producto.

$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{a^{12}b^{12}}}} =$ ← Propiedad de la raíz de un cociente.

$\sqrt[24]{a^{12}b^{12}} =$ ← Propiedad de la raíz de una raíz.

$\sqrt[24]{(ab)^{12}} =$ ← Propiedad de la potencia de un producto.

$(ab)^{\frac{12}{24}} = (ab)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$ ← Se expresa como potencia y se simplifica.

Sabías que...

Nicolás Oresme (1323-1382) fue un intelectual francés, quien estableció algunas propiedades de la potenciación con exponentes racionales, tales como:

$$(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\, b^{\frac{1}{n}}$$

$$(a^m)^{\frac{p}{q}} = (a^{mp})^{\frac{1}{q}}$$

Taller Nº2

En los siguientes ejercicios, desarrolle solo los números marcados con ganchos.

Evaluación formativa

Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno y anota las respuestas en el libro.

Expresa cada potencia como una raíz.

46. $5^{\frac{1}{3}} =$ ______
47. $(0,2)^{\frac{1}{4}} =$ ______
48. $(0,5)^{\frac{-3}{5}} =$ ______
49. $a^{\frac{1}{2}} =$ ______
50. $(2-x)^{\frac{1}{2}} =$ ______
51. $m^{\frac{5}{4}} =$ ______
52. $(x^3)^{\frac{2}{3}} =$ ______
53. $(3x^2)^{\frac{-3}{4}} =$ ______

Expresa cada raíz como una potencia.

54. $\sqrt{17} =$ ______
55. $\sqrt[4]{25} =$ ______
56. $\sqrt[5]{0,064} =$ ______
57. $\sqrt[6]{\dfrac{3}{5}} =$ ______
58. $\sqrt[7]{y^5} =$ ______
59. $\sqrt[6]{2x^3} =$ ______
60. $\sqrt[3]{12-x} =$ ______
61. $\sqrt[3]{\left(\dfrac{a-1}{b}\right)^2} =$ ______
62. $\sqrt{a^{r+2}} =$ ______

Calcula cada raíz sin usar calculadora.

63. $\sqrt[4]{0,0625} =$ ______
64. $\sqrt{169} =$ ______
65. $\sqrt[4]{16} =$ ______
66. $\sqrt[3]{512} =$ ______
67. $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}} =$ ______
68. $\sqrt{0,25} =$ ______
69. $\sqrt[6]{\dfrac{64}{729}} =$ ______
70. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}} =$ ______
71. $\sqrt[3]{0,729} =$ ______

Simplifica al máximo.

- Expresa tu respuesta como una expresión radical.

72. $\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a}}} =$ ____________

73. $\sqrt{\sqrt[3]{25}} =$ ____________

74. $\sqrt{(\sqrt[4]{4})(\sqrt[4]{64})} =$ ____________

75. $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}}} =$ ____________

76. $\sqrt{2\sqrt{3}} =$ ____________

77. $\sqrt{a\sqrt[3]{a}} =$ ____________

78. $\sqrt{4\sqrt{9\sqrt[3]{729}}} =$ ____________

79. $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$ ____________

80. $\sqrt{3\sqrt[3]{2x\sqrt{x}}} =$ ____________

81. $\sqrt[3]{x\sqrt{x\sqrt[3]{x}}} =$ ____________

82. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{256(a^{16}b^4)^2}}} =$ ____________

83. $\sqrt{\sqrt{\dfrac{\sqrt{4a^2b^8}}{\sqrt{6561a^{16}b^{24}}}}} =$ ____________

84. $\left(\sqrt[6]{\sqrt{s^{24}t^{36}u^{12}}}\right)^2 =$ ____________

85. $\sqrt[6]{(\sqrt{m^2n^4})(\sqrt{m^4n^2})} =$ ____________

Determina el valor de **m** en cada caso.

86. $\sqrt[3]{m} = 2$ $m =$ ________

87. $\sqrt[m]{243} = 3$ $m =$ ________

88. $(\sqrt[m]{2187})^3 = 27$ $m =$ ________

89. $\sqrt[3]{1728} = m$ $m =$ ________

90. $\sqrt{m} \cdot \sqrt{m} = 1296$ $m =$ ________

91. $\sqrt[m]{-1{,}331} = -1{,}1$ $m =$ ________

92. $\sqrt{\sqrt[3]{4096}} = m$ $m =$ ________

93. $\sqrt[3]{\sqrt{m}} = 5$ $m =$ ________

Completa cada igualdad.

94. $\sqrt[3]{729a^5b^{\square}c^{\square}} = \square ab^4c^2\sqrt[3]{a^{\square}c^2}$

95. $\sqrt[4]{\square m^{\square}n^{\square}p^{\square}} = 5mnp\sqrt[4]{m^2n^3}$

96. $\dfrac{ab}{c}\sqrt[\square]{\sqrt[4]{\sqrt[\square]{\dfrac{a^{\square}}{c^{20}}}}} = \sqrt[60]{\dfrac{a^{100}b^{\square}}{c^{\square}}}$

Resolución de problemas

97. El área de un cuadrado está dada por:

$$A = \frac{144x^{16}}{w^8}$$

¿Qué expresión algebraica representa la medida de cada lado de ese cuadrado?

____

98. La fórmula que permite calcular el *handicap* (resistencia impuesta por la naturaleza para una actividad) necesario para los levantadores de pesas está dado por: $W = \dfrac{w}{\sqrt[3]{a-35}}$

En esta expresión, **a** es la masa del atleta en kilogramos, **w** es la masa que levanta el atleta y **W** es el *handicap*. Si un atleta tiene una masa de 99 kg y levanta 150 kg y otro atleta con una masa de 62 kg logra levantar 80 kg, ¿cuál de los 2 tiene mayor *handicap*?

____

99. La expresión que permite calcular la velocidad **v** de un satélite que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio **r**, es:

$$v = \frac{1}{R}\left(\frac{4R}{2}\right)^2\sqrt{\frac{2}{r}}$$

En esta expresión, **R** es el radio de la Tierra y **v** se expresa en pies por segundo.

a. Comprueba que $v = R\sqrt{\dfrac{32}{r}}$.

____

b. Si el radio de la Tierra es aproximadamente $6{,}37 \cdot 10^6$ m y $r = 6{,}76 \cdot 10^6$ m, ¿cuál es la velocidad del satélite?

____