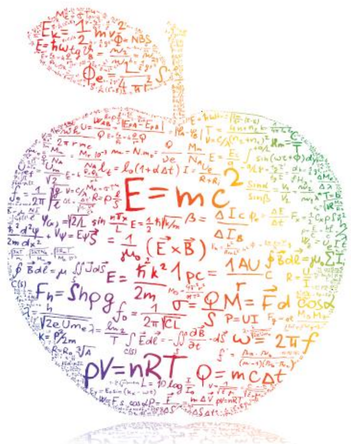
Ministerio de Educación
Educación Particular

Centro Educativo Bellas Luces

Módulo #2 Matemáticas

11º Grado A - Mención Ciencias
Del 6 al 17 de julio



NÚMEROS COMPLEJOS

Profesor Juan Guillén

Fecha de entrega: viernes 17 de julio de 2020
Enviar al correo electrónico: jddgq@hotmail.com

Indicaciones: Realizar las actividades en el cuaderno. Identificar con nombre, apellido y grado antes de enviar las fotos al correo electrónico. Cada asignación debe ser hecha con puño y letra del estudiante. Cualquier consulta no duden en escribirme al correo electrónico.

Objetivos: Aplica los métodos de solución de sistemas de ecuaciones para determinar las raíces que las satisfacen. Traduce problemas del entorno al lenguaje matemático para ser resueltos, demostrando perseverancia, razonamiento lógico y creatividad.

Unidad imaginaria

Se llama así al número $\sqrt{-1}$ y se designa por la letra i.

$$\sqrt{-1} = i$$

Las raíz cúbica de -1 **no es un numero imaginario ni complejo**.

$$\sqrt[3]{-1} = -1 \Rightarrow (-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1$$

Ejemplos con unidad imaginaria

1. $\sqrt{-4} = \sqrt{(4)(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = \sqrt{4}i = 2i$

2. $\sqrt{-7} = \sqrt{(7)\,(-1)} = \sqrt{-7}\sqrt{-1} = \sqrt{7}i \approx 2.64575$

3. $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(8)\,(-1)} = \sqrt[3]{8}\sqrt[3]{-1} = (2)\,(-1) = -2$

4. $\sqrt[3]{-10} = \sqrt[3]{(10)\,(-1)} = \sqrt[3]{10}\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{10}\,(-1) = -\sqrt[3]{10} \approx -2.15443.....$

Número complejo

Al número

$$z = a + bi$$

se le llama **número complejo en forma binómica** o binomial. En general, cualquier número complejo se denota por la letra z.

Al número $a$se llama **parte real** del número complejo y se denota por $a = Re(z)$, mientras que al número $b$se llama **parte imaginaria** del número complejo y se denota por $b = Im(z)$.

Si la **parte imaginaria** de un número complejo vale **cero**, esto es $b = 0$, se reduce a un **número real** a, ya que $z = a + 0i = a$.

Si la **parte real** de un número complejo vale **cero**, esto es $a = 0$, el número complejo se reduce a bi, y se dice que es un **número imaginario puro**.

En general, al conjunto de todos números complejos se le designa por el símbolo $\mathbb{C}$. De una manera más formal, utilizando notación de conjuntos, se le denota como:

$$\mathbb{C} = \{\mathbf{a + bi/a, b} \ \epsilon \ \mathbb{R}\}$$

Los números complejos

$a + bi$ y

abi

se llaman **opuestos** o **contrarios**.

Los números complejos

$$z = a + bi$$

y

$$\overline{z} = a - bi$$

se llaman **complejos conjugados**.

Dos **números complejos** son **iguales** cuando tienen la **misma componente real y** la **misma componente imaginaria**, es decir:

$$\mathbf{z_1 = a + bi}$$

$$\mathbf{z_2 = c + di}$$

con $a = c$ o $\mathbf{Re(z_1) = Re\,(z_2)}$

y $b = d$ o $\mathbf{Im(z_1) = Im\,(z_2)}$

Potencias de la unidad imaginaria

$$i^o = 1$$

$$i^1 = i$$

$i^2 = -1$, ya que $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = (\sqrt{-1})^2 \Rightarrow i^2 = -1$

$i^3 = -i$, ya que $i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$

$i^4 = 1$, ya que $i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$ o $i^4 = i^3 i = (-i)i = -i^2 = -(-1) = 1$

Ejemplos de potencias superiores de números complejos

1. $i^{22} = i^{20} \cdot i^2 = (i^4)^5 \cdot i^2 = (1)^5 \cdot (-1) = -1$
2. $i^{27} = i^{24} \cdot i^3 = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1^6 \cdot (-i) = i$
3. $i^{125} = i^{120} \cdot i^5 = (i^2)^{60} \cdot i^4 \cdot i = (-1)^{60} \cdot (1) \cdot i = (1) \cdot (1) \cdot (i) = i$
4. $i^{500} = (i^4)^{125} = (1)^{125} = 1$

Números imaginarios puros

Un **número imaginario puro** se denota por:

$z = bi$

donde:

b es un **número real**.

i es la **unidad imaginaria**.

Recordemos que su parte real es 0, es decir, $a = Re(z) = 0$. A los números complejos cuya parte real es distinta de cero también se les puede llamar simplemente **números imaginarios**.

Operaciones de complejos en forma binómica

Suma y diferencia de números complejos

La regla para sumar o restar dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ es sumar/restar parte real de uno con parte real del otro y parte imaginaria de uno con parte imaginaria del otro.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Cuando se tienen suma y resta combinadas de varios números complejos, se suman y/o restan las partes reales con las partes reales y las partes imaginarias con las partes imaginarias.

Ejemplos:

1. $(5 - 8i) + (7 + 6i) = (5 + 7) + (-8 + 6)i = 12 + (-2)i$

2. $(3 - i) - (-8 - 9i) = (3 - (-8)) + (1 - (-9))i =$

$(3 + 8) + (-1 + 9)i = 11 + 8i$

3. $(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) = (5 + (-8) - 4) + (2i + 3i - (-2i)) =$

$(5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i = -7 + 7i$

La **suma y resta de números complejos** también **se puede operar como suma y resta de polinomios**, ya que los **números complejos** están expresados de la **forma binómica**.
Ejemplo:

$$-(5+2i)-(-4-10i)+(1-i)-(-1+i)=$$
$$-5-2i+4+10i+1-i+1-i=$$
$$-5+4+1+1+1-2i+10i-i-i+i=2+7i$$

Producto de números complejos

El producto o **multiplicación** de números complejos expresados en la **forma binómica** se opera de acuerdo a la siguiente **fórmula**:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

o también puede efectuarse como el **producto de binomios.**

Ejemplo de acuerdo a la fórmula:

$$(2-5i)\cdot(3+2i)=[(2)(3)-(-5)(2)]+[(2)(2)+(-5)(3)]\,i=$$

$$(6+10)+(4-15)i=16+(-11)i=16-11i$$

Ejemplo como producto de binomios:

$$(5+2i)\cdot(2-3i)=10-15i+4i-6i^2=10-11i+6=16-11i$$

Cociente de números complejos

La **división** de dos **números complejos** expresados como fracción se efectúa **multiplicando** tanto el **numerador** como el **denominador** de dicha fracción **por el complejo conjugado del denominador** y, posteriormente, realizando las simplificaciones correspondientes hasta expresar el resultado de la forma $a+bi$.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Ejemplos:

1 $$\frac{3+2i}{1-2i}=\frac{(3+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{3+6i+2i+4i^2}{1-(2i)^2}=$$
$$\frac{3-8i+4(-1)}{1-4i^2}=\frac{3-8i-4}{1-4(-1)}=\frac{-1+8i}{5}=$$
$$-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}+\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}\mathbf{i}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}(\mathbf{1}-\mathbf{8i})$$

2 $$\frac{1-2i}{1+2i}=\frac{(1-2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=$$
$$\frac{1-2i-2i+4i^2}{1-(2i)^2}=\frac{1-4i+4(-1)}{1-4i^2}=$$
$$\frac{1-4i-4}{1-4(-1)}=\frac{-3-4i}{5}=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\mathbf{i}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}(\mathbf{3}+\mathbf{4i})$$

1. Resolver las siguientes ecuaciones en el campo de los números complejos:

a) $x^2-2x+2=0$ *(Soluc: $1\pm i$)*

b) $x^2+3=0$ *(Soluc: $\pm\sqrt{3}i$)*

c) $x^2-2x+4=0$ *(Soluc: $1\pm\sqrt{3}i$)*

d) $x^2+x+1=0$ *(Soluc: $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

e) $x^3-6x^2+21x-26=0$ *(Soluc: 2, $2\pm 3i$)*

f) $x^3+1=0$ *(Soluc: -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$)*

g) $x^4-1=0$ *(Soluc: ± 1, $\pm i$)*

h) $x^4-3x^3-2x^2+10x-12=0$ *(Soluc: -2, 3, $1\pm i$)*

2. Completar (obsérvese el primer ejemplo):

COMPLEJO **z**	**PARTE REAL** **Re(z)**	**PARTE IMAGINARIA** **Im(z)**	**OPUESTO** **-z**	**CONJUGADO** $\overline{z}$
$z=2+3i$	$Re(z)=2$	$Im(z)=3$	$-z=-2-3i$	$\overline{z}=2-3i$
$z=3-i$				
$z=1+i$				
$z=3-3\sqrt{3}i$				
$z=3$				
$z=-2i$				
$z=i$				

3. Dados los complejos $z_1=2+3i$, $z_2=-1+4i$ y $z_3=2-5i$, hallar:

a) $z_1+z_2=$ *(Soluc: $1+7i$)*

b) $z_1+z_3=$ *(Soluc: $4-2i$)*

c) $z_1-z_2=$ *(Soluc: $3-i$)*

d) $z_3-z_2=$ *(Soluc: $3-9i$)*

e) $3z_2+2z_3=$ *(Soluc: $1+2i$)*

f) $2z_1-3z_2=$ *(Soluc: $7-6i$)*

g) $z_3-3z_1+4z_2=$ *(Soluc: $-8+2i$)*

h) $z_1+\overline{z_2}=$ *(Soluc: $1-i$)*

i) $z_3-\overline{z_3}=$ *(Soluc: $-10i$)*

j) $2\overline{z_1}-z_1=$ *(Soluc: $2-9i$)*